Exámenes de Selectividad

Matemáticas II. Madrid 2023, Ordinaria

Ejercicio 1. Opción A. Álgebra

En una obra, para transportar la tierra extraída para la construcción de los cimientos de un edificio, se usan tres tipos de camiones diferentes: A, B y C. Los camiones de tipo A tienen una capacidad de 14 toneladas, los de tipo B, de 24 toneladas y los de tipo C, de 28 toneladas. Habría que traer un camión más de tipo A para igualar al número de camiones restantes. El 10% de la capacidad de todos los camiones tipo B supone un séptimo de la de los de mayor tonelaje. Hoy, realizando un único viaje cada camión a máxima capacidad, se han extraído de la obra 302 toneladas de tierra. ¿Cuanta tierra ha sido transportada hoy por los camiones de cada tipo?

Solución:

¿Cuanta tierra ha sido transportada hoy por los camiones de cada tipo?

Sean X, Y, Z el número de camiones de tipo A, B y C respectivamente:

Planteamos el sistema de ecuaciones:

1. **Número de camiones:** $X + 1 = Y + Z \implies X - Y - Z = -1$.
2. **Capacidad B vs C:** $0.10 \times (Y \times 24) = \frac{1}{7} \times (Z \times 28) \implies 2.4B = 4Z \implies 3Y - 5Z = 0$.
3. **Transporte total:** $14X + 24Y + 28Z = 302$. Dividiendo por 2: $7X + 12Y + 14Z = 151$.

El sistema es:

$$\begin{cases} X - Y - Z = -1 \\ 3X - 5Y = 0 \\ 7X + 12Y + 14Z = 151 \end{cases}$$

Discusión del sistema (Teorema de Rouché-Frobenius): La matriz de coeficientes (M) y la ampliada (M*) son:

$$M = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 3 & -5 \\ 7 & 12 & 14 \end{pmatrix}, \quad (M|M^*) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 3 & -5 & 0 \\ 7 & 12 & 14 & 151 \end{array}\right)$$

Calculamos $|M|$: $|M| = 1(42 - (-60)) - (-1)(0 - (-35)) + (-1)(0 - 21) = 102 + 35 + 21 = 158$. Como $|M| = 158 \neq 0$, $\text{Rg}(M) = 3 = \text{Rg}(M^*) = \text{n}^{\text{o}}$ incógnitas. El sistema es Compatible Determinado (S.C.D.).

$$\boxed{\textbf{El sistema es Compatible Determinado (S.C.D.)}}$$

Resolución del sistema (Regla de Cramer):

$$|M| = 158$$

$$|M_X| = \begin{vmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 0 & 3 & -5 \\ 151 & 12 & 14 \end{vmatrix} = -1(42 + 60) + 1(0 + 755) - 1(0 - 453) = -102 + 755 + 453 = 1106$$

$$|M_Y| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -5 \\ 7 & 151 & 14 \end{vmatrix} = -(-1)(0 - (-35)) + 0 - (-5)(151 - 0) = 35 + 755 = 790$$

$$|M_Z| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 7 & 12 & 151 \end{vmatrix} = 1(3(151) - 0) - (-1)(0 - 0) + (-1)(0 - 21) = 453 + 21 = 474$$

$$X = \frac{|M_A|}{|M|} = \frac{1106}{158} = 7$$

$$Y = \frac{|M_B|}{|M|} = \frac{790}{158} = 5$$

$$Z = \frac{|M_C|}{|M|} = \frac{474}{158} = 3$$

La tierra transportada por cada tipo es: Tipo A: 7×14t $= 98$ toneladas. Tipo B: 5×24t $= 120$ toneladas. Tipo C: 3×28t $= 84$ toneladas.

$\boxed{\textbf{Tipo A: 98 toneladas, Tipo B: 120 toneladas, Tipo C: 84 toneladas.}}$

Ejercicio 2. Opción A. Análisis

Dada la función $f(x) = \sqrt[3]{(x^2-1)^2}$, se pide:

a) **Estudiar si es par o impar.**
b) **Estudiar su derivabilidad en el punto $x = 1$.**
c) **Estudiar sus extremos relativos y absolutos.**

Solución:

a) **Estudiar si es par o impar.**

Calculamos $f(-x)$:
$$f(-x) = \sqrt[3]{((-x)^2-1)^2} = \sqrt[3]{(x^2-1)^2} = f(x).$$
Como $f(-x) = f(x)$, la función es par.

$$\boxed{\textbf{La función es par.}}$$

b) **Estudiar su derivabilidad en el punto $x = 1$.**

Escribimos $f(x) = (x^2-1)^{2/3}$.
Calculamos la derivada $f'(x)$ para $x \neq \pm 1$:
$$f'(x) = \frac{2}{3}(x^2-1)^{-1/3} \cdot (2x) = \frac{4x}{3\sqrt[3]{x^2-1}}.$$
La derivada no está definida en $x = 1$. Estudiamos los límites laterales de $f'(x)$ cuando $x \to 1$:
$$\lim_{x\to 1^+} f'(x) = \lim_{x\to 1^+} \frac{4x}{3\sqrt[3]{x^2-1}} = \frac{4}{3\cdot 0^+} = +\infty.$$
$$\lim_{x\to 1^-} f'(x) = \lim_{x\to 1^-} \frac{4x}{3\sqrt[3]{x^2-1}} = \frac{4}{3\cdot 0^-} = -\infty.$$
Como los límites son infinitos, la función no es derivable en $x = 1$.

$$\boxed{\textbf{La función no es derivable en } \boldsymbol{x = 1}.}$$

c) **Estudiar sus extremos relativos y absolutos.**

Los puntos críticos son donde $f'(x) = 0$ o donde f no es derivable. $f'(x) = 0 \implies 4x = 0 \implies x = 0$.
Puntos de no derivabilidad: $x = 1$ y $x = -1$.
Puntos críticos a estudiar: $x = -1, x = 0, x = 1$.
Estudiamos el signo de $f'(x) = \frac{4x}{3\sqrt[3]{x^2-1}}$:

Intervalo	$(-\infty,-1)$	$(-1,0)$	$(0,1)$	$(1,+\infty)$
Signo $f'(x)$	$-$	$+$	$-$	$+$
Comportamiento $f(x)$	Decreciente $\searrow$	Creciente $\nearrow$	Decreciente $\searrow$	Creciente $\nearrow$

De la tabla:
En $x = -1$, pasa de decreciente a creciente $\implies$ Mínimo relativo. $f(-1) = 0$.
En $x = 0$, pasa de creciente a decreciente $\implies$ Máximo relativo. $f(0) = 1$.

En $x = 1$, pasa de decreciente a creciente $\Longrightarrow$ Mínimo relativo. $f(1) = 0$.
Extremos absolutos: Como $f(x) = \sqrt[3]{(x^2-1)^2} \geq 0$ para todo x, los mínimos relativos en $x = -1$ y $x = 1$ con valor 0 son también mínimos absolutos. $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = +\infty$, por lo que no hay máximo absoluto.

$$\boxed{\textbf{Mínimos relativos y absolutos en } (-1,0) \textbf{ y } (1,0)\textbf{. Máximo relativo en } (0,1)}$$

Ejercicio 3. Opción A. Geometría

Sean los puntos $A(1,-2,3)$, $B(0,2,-1)$ y $C(2,1,0)$. Se pide:

a) **Comprobar que forman un triángulo T y hallar una ecuación del plano que los contiene.**
b) **Calcular el corte de la recta que pasa por los puntos A y B con el plano $z=1$.**
c) **Determinar el perímetro del triángulo T.**

Solución:

a) **Comprobar que forman un triángulo T y hallar una ecuación del plano que los contiene.** Calculamos $\vec{AB}=(-1,4,-4)$ y $\vec{AC}=(1,3,-3)$. Como $\frac{-1}{1}\neq\frac{4}{3}$, los vectores no son proporcionales y los puntos no están alineados, formando un triángulo T. El plano π que los contiene pasa por A y tiene vectores directores $\vec{AB}$ y $\vec{AC}$.

$$\begin{vmatrix} x-1 & y+2 & z-3 \\ -1 & 4 & -4 \\ 1 & 3 & -3 \end{vmatrix}=0$$

$$(x-1)(0)-(y+2)(7)+(z-3)(-7)=0$$

$$-7(y+2)-7(z-3)=0 \implies y+2+z-3=0 \implies y+z-1=0.$$

$$\boxed{\textbf{Los puntos forman un triángulo. Plano: } \boldsymbol{y+z-1=0}.}$$

b) **Calcular el corte de la recta que pasa por los puntos A y B con el plano $z=1$.** Recta r por A y B: Punto $A(1,-2,3)$, vector $\vec{AB}=(-1,4,-4)$. Paramétricas: $x=1-\lambda, y=-2+4\lambda, z=3-4\lambda$. Intersección con $z=1$: $3-4\lambda=1 \implies 4\lambda=2 \implies \lambda=1/2$. Punto: $x=1-1/2=1/2$, $y=-2+4(1/2)=0$, $z=1$.

$$\boxed{\textbf{El punto de corte es } \left(\frac{1}{2},0,1\right).}$$

c) **Determinar el perímetro del triángulo T.** Perímetro $P=|\vec{AB}|+|\vec{AC}|+|\vec{BC}|$. $|\vec{AB}|=\sqrt{(-1)^2+4^2+(-4)^2}=\sqrt{1+16+16}=\sqrt{33}$. $|\vec{AC}|=\sqrt{1^2+3^2+(-3)^2}=\sqrt{1+9+9}=\sqrt{19}$. $\vec{BC}=C-B=(2,-1,1)$. $|\vec{BC}|=\sqrt{2^2+(-1)^2+1^2}=\sqrt{4+1+1}=\sqrt{6}$.

$$\boxed{\textbf{Perímetro } =\sqrt{33}+\sqrt{19}+\sqrt{6}\textbf{ u}}$$

Ejercicio 4. Opción A. Probabilidad

Se tiene un suceso A de probabilidad $P(A) = 0.3$.

a) **Un suceso B de probabilidad $P(B) = 0.5$ es independiente de A. Calcule $P(A \cup B)$.**
b) **Otro suceso C cumple $P(C|A) = 0.5$. Determine $P(A \cap \overline{C})$.**
c) **Si se tiene un suceso D tal que $P(A|D) = 0.2$ y $P(D|A) = 0.5$, calcule $P(D)$.**

Solución:

a) **Un suceso B de probabilidad $P(B) = 0.5$ es independiente de A. Calcule $P(A \cup B)$.**
$P(A) = 0.3$, $P(B) = 0.5$. A y B independientes $\Longrightarrow$ $P(A \cap B) = P(A)P(B) = (0.3)(0.5) = 0.15$.
$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0.3 + 0.5 - 0.15 = 0.65$.

$$\boxed{P(A \cup B) = 0.65}$$

b) **Otro suceso C cumple $P(C|A) = 0.5$. Determine $P(A \cap \overline{C})$.** $P(A \cap \overline{C}) = P(A) - P(A \cap C)$.
$P(C|A) = P(A \cap C)/P(A) \Longrightarrow P(A \cap C) = P(C|A)P(A) = (0.5)(0.3) = 0.15$. $P(A \cap \overline{C}) = 0.3 - 0.15 = 0.15$.

$$\boxed{P(A \cap \overline{C}) = 0.15}$$

c) **Si se tiene un suceso D tal que $P(A|D) = 0.2$ y $P(D|A) = 0.5$, calcule $P(D)$.** $P(A \cap D) = P(D|A)P(A) = (0.5)(0.3) = 0.15$. $P(A|D) = P(A \cap D)/P(D) \Longrightarrow 0.2 = 0.15/P(D)$. $P(D) = 0.15/0.2 = 15/20 = 3/4 = 0.75$.

$$\boxed{P(D) = 0.75}$$

Ejercicio 1. Opción B. Álgebra

Dado el sistema

$$\begin{cases} \boldsymbol{(a+1)x + 4y = 0,} \\ \boldsymbol{(a-1)y + z = 3,} \\ \boldsymbol{4x + 2ay + z = 3} \end{cases}$$

se pide:

a) **Discutirlo en función del parámetro a.**
b) **Resolverlo para a = 3.**
c) **Resolverlo para a = 5.**

Solución:

a) **Discutirlo en función del parámetro a.** *Discusión del sistema (Teorema de Rouché-Frobenius):*

Matriz de coeficientes A y ampliada A*:

$$A = \begin{pmatrix} a+1 & 4 & 0 \\ 0 & a-1 & 1 \\ 4 & 2a & 1 \end{pmatrix}, \quad (A|A^*) = \left(\begin{array}{ccc|c} a+1 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & a-1 & 1 & 3 \\ 4 & 2a & 1 & 3 \end{array}\right)$$

$|A| = (a+1)(a-1-2a) - 4(0-4) = (a+1)(-a-1) + 16 = 16 - (a+1)^2$. $|A| = 0 \implies (a+1)^2 = 16 \implies a+1 = \pm 4$. Valores críticos: $a = 3$ y $a = -5$.

Caso 1: Si $\boldsymbol{a \neq 3}$ y $\boldsymbol{a \neq -5}$. $|A| \neq 0 \implies \text{Rg}(A) = 3 = \text{Rg}(A^*) = n \implies$ S.C.D.

Caso 2: Si $\boldsymbol{a = 3}$.

$$(A|A^*) = \left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 3 \\ 4 & 6 & 1 & 3 \end{array}\right)$$

$|A| = 0$. $\text{Rg}(A) = 2$ (ej: menor $\begin{vmatrix} 4 & 4 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} \neq 0$). Menor de A^* (C_1, C_2, C_4): $\begin{vmatrix} 4 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \\ 4 & 6 & 3 \end{vmatrix} = 0$. $\text{Rg}(A^*) = 2$. $\text{Rg}(A) = \text{Rg}(A^*) = 2 < 3 \implies$ S.C.I.

Caso 3: Si $\boldsymbol{a = -5}$.

$$(A|A^*) = \left(\begin{array}{ccc|c} -4 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & -6 & 1 & 3 \\ 4 & -10 & 1 & 3 \end{array}\right)$$

$|A| = 0$. $\text{Rg}(A) = 2$ (ej: menor $\begin{vmatrix} -4 & 4 \\ 0 & -6 \end{vmatrix} \neq 0$). Menor de A^* (C_1, C_2, C_4): $\begin{vmatrix} -4 & 4 & 0 \\ 0 & -6 & 3 \\ 4 & -10 & 3 \end{vmatrix} = 0$. $\text{Rg}(A^*) = 2$. $\text{Rg}(A) = \text{Rg}(A^*) = 2 < 3 \implies$ S.C.I.

$$\boxed{\textbf{Si } \boldsymbol{a \neq 3, a \neq -5 \implies S.C.D.} \quad \textbf{Si } \boldsymbol{a = 3} \text{ o } \boldsymbol{a = -5 \implies S.C.I.}}$$

b) **Resolverlo para a = 3.** Para $a = 3$, es S.C.I. El sistema es equivalente a:

$$\begin{cases} 4x + 4y = 0 \\ 2y + z = 3 \end{cases}$$

De (1): $x = -y$. Sea $y = t$, $t \in \mathbb{R}$. Entonces $x = -t$. De (2): $z = 3 - 2y = 3 - 2t$.

$$\boxed{\textbf{Para } \boldsymbol{a = 3}\textbf{, la solución es } \boldsymbol{(x, y, z) = (-t, t, 3 - 2t), t} \in \mathbb{R}.}$$

c) Resolverlo para a = 5. Para $a = 5$, es S.C.D. El sistema es:

$$\begin{cases} 6x + 4y = 0 \\ 4y + z = 3 \\ 4x + 10y + z = 3 \end{cases}$$

$|A| = 16 - (5+1)^2 = 16 - 36 = -20$. Usamos la Regla de Cramer:

$$|A_x| = \begin{vmatrix} 0 & 4 & 0 \\ 3 & 4 & 1 \\ 3 & 10 & 1 \end{vmatrix} = -4(3 - 3) = 0$$

$$|A_y| = \begin{vmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 4 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 6(3 - 3) = 0$$

$$|A_z| = \begin{vmatrix} 6 & 4 & 0 \\ 0 & 4 & 3 \\ 4 & 10 & 3 \end{vmatrix} = 6(12 - 30) - 4(0 - 12) = 6(-18) - 4(-12) = -108 + 48 = -60$$

$$x = 0/(-20) = 0$$

$$y = 0/(-20) = 0$$

$$z = -60/(-20) = 3$$

$$\boxed{\textbf{Para } \boldsymbol{a = 5}\textbf{, la solución es } \boldsymbol{(x, y, z) = (0, 0, 3)}.}$$

Ejercicio 2. Opción B. Análisis

Dada la función real de variable real definida sobre su dominio como

$$\boldsymbol{f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2}{2+x^2} & \text{si } x \leq -1, \\ \dfrac{2x^2}{3-3x} & \text{si } x > -1 \end{cases}}$$

se pide:

a) **Estudiar la continuidad de la función en R.**
b) **Calcular el siguiente límite:** $\boldsymbol{\lim_{x\to-\infty} f(x)^{2x^2-1}}$.
c) **Calcular la siguiente integral:** $\boldsymbol{\int_{-1}^{0} f(x)dx}$.

Solución:

a) **Estudiar la continuidad de la función en R.**

Continuidad por trozos: Para $x < -1$, $f(x) = \frac{x^2}{2+x^2}$ es continua (cociente de polinomios, denominador nunca 0).
Para $x > -1$, $f(x) = \frac{2x^2}{3-3x}$ es continua excepto donde $3 - 3x = 0$, i.e., $x = 1$.
Continuidad en $x = -1$:
$f(-1) = \frac{(-1)^2}{2+(-1)^2} = 1/3$.
$\lim_{x\to-1^-} f(x) = \lim_{x\to-1^-} \frac{x^2}{2+x^2} = 1/3$.
$\lim_{x\to-1^+} f(x) = \lim_{x\to-1^+} \frac{2x^2}{3-3x} = \frac{2(-1)^2}{3-3(-1)} = 2/6 = 1/3$.
Como los límites laterales y el valor de la función coinciden, f es continua en $x = -1$.

$$\boxed{\textbf{La función es continua en } \mathbb{R} - \{1\}.}$$

b) **Calcular el siguiente límite:** $\boldsymbol{\lim_{x\to-\infty} f(x)^{2x^2-1}}$.

Para $x \to -\infty$, $f(x) = \frac{x^2}{2+x^2}$.

$$L = \lim_{x\to-\infty} \left(\frac{x^2}{2+x^2}\right)^{2x^2-1}$$

Base $\to 1$. Exponente $\to +\infty$. Indeterminación 1^∞ $L = e^K$, donde $K = \lim_{x\to-\infty}(2x^2-1)\left(\frac{x^2}{2+x^2} - 1\right)$.

$$K = \lim_{x\to-\infty}(2x^2 - 1)\left(\frac{-2}{2+x^2}\right) = \lim_{x\to-\infty} \frac{-4x^2+2}{x^2+2} = -4$$

$$L = e^{-4}$$

$$\boxed{\boldsymbol{\lim_{x\to-\infty} f(x)^{2x^2-1} = e^{-4}}}$$

c) **Calcular la siguiente integral:** $\boldsymbol{\int_{-1}^{0} f(x)dx}$.

En $[-1, 0]$, $x > -1$, usamos $f(x) = \frac{2x^2}{3-3x}$.

$$I = \int_{-1}^{0} \frac{2x^2}{3(1-x)}dx = \frac{2}{3}\int_{-1}^{0} \frac{x^2}{1-x}dx$$

Descomponemos el integrando:

$$\frac{x^2}{1-x} = -x - 1 - \frac{1}{x-1}$$

$$I = \frac{2}{3}\int_{-1}^{0} (-x - 1 - \frac{1}{x-1})dx$$

$$I = \frac{2}{3}\left[-\frac{x^2}{2} - x - \ln|x-1|\right]_{-1}^{0}$$

$$I = \frac{2}{3}[(0 - 0 - \ln|-1|) - (-\frac{(-1)^2}{2} - (-1) - \ln|-1-1|)]$$

$$I = \frac{2}{3}[(0) - (-\frac{1}{2} + 1 - \ln(2))] = \frac{2}{3}[-(\frac{1}{2} - \ln 2)]$$

$$I = \frac{2}{3}[-\frac{1}{2} + \ln 2] = -\frac{1}{3} + \frac{2}{3}\ln 2$$

$$\boxed{\boldsymbol{\int_{-1}^{0} f(x)dx = -\frac{1}{3} + \frac{2}{3}\ln(2)}}$$

Ejercicio 3. Opción B. Geometría

Dada la recta $r \equiv \frac{x-1}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z+1}{-2}$, el plano $\pi : x - z = 2$ y el punto $A(1,1,1)$ se pide:

a) **Estudiar la posición relativa de r y π y calcular su intersección, si existe.**
b) **Calcular la proyección ortogonal del punto A sobre el plano π.**
c) **Calcular el punto simétrico del punto A con respecto a la recta r.**

Solución:

a) **Estudiar la posición relativa de r y π y calcular su intersección, si existe.**

r: $P_r(1,0,-1)$, $\vec{d_r} = (2,1,-2)$. $\pi : x - z - 2 = 0$, $\vec{n}_\pi = (1,0,-1)$.
$\vec{d_r} \cdot \vec{n}_\pi = (2)(1) + (1)(0) + (-2)(-1) = 2 + 0 + 2 = 4 \neq 0$. La recta y el plano se cortan en un único punto.
Para encontrar la intersección:
Paramétricas de r: $x = 1 + 2t, y = t, z = -1 - 2t$.
Sustituimos en

$$\pi : (1 + 2t) - (-1 - 2t) - 2 = 0 \implies 1 + 2t + 1 + 2t - 2 = 0 \implies 4t = 0 \implies t = 0$$

Punto de intersección I: $(1 + 0, 0, -1 - 0) = (1, 0, -1)$.

$$\boxed{\textbf{La recta y el plano se cortan en el punto } \boldsymbol{I(1,0,-1)}.}$$

b) **Calcular la proyección ortogonal del punto A sobre el plano π.**

Sea A' la proyección de $A(1,1,1)$ sobre $\pi : x - z - 2 = 0$.
Recta p perpendicular a π por A: $\vec{d_p} = \vec{n}_\pi = (1,0,-1)$. $p : x = 1 + t, y = 1, z = 1 - t$.
Para encontrar la intersección:

$$A' = p \cap \pi : (1 + t) - (1 - t) - 2 = 0 \implies 2t - 2 = 0 \implies t = 1$$

$A' = (1 + 1, 1, 1 - 1) = (2, 1, 0)$.

$$\boxed{\textbf{La proyección ortogonal es } \boldsymbol{A'(2,1,0)}.}$$

c) **Calcular el punto simétrico del punto A con respecto a la recta r.**

Sea A'' el simétrico de $A(1,1,1)$ respecto a r.
Primero, buscaremos el Plano π perpendicular a r por A:
$\vec{n}_\pi = \vec{d_r} = (2,1,-2)$. $2(x-1) + 1(y-1) - 2(z-1) = 0 \implies 2x + y - 2z - 1 = 0$.
$M = r \cap \pi$. $r : x = 1 + 2t, y = t, z = -1 - 2t$.

$$2(1 + 2t) + (t) - 2(-1 - 2t) - 1 = 0 \implies 2 + 4t + t + 2 + 4t - 1 = 0 \implies 9t + 3 = 0 \implies t = -1/3$$
$$M(1 - 2/3, -1/3, -1 + 2/3) = (1/3, -1/3, -1/3)$$

M es punto medio de AA''. $A'' = 2M - A$.

$$A'' = 2(1/3, -1/3, -1/3) - (1,1,1) = (2/3 - 1, -2/3 - 1, -2/3 - 1) = (-1/3, -5/3, -5/3)$$

$$\boxed{\textbf{El punto simétrico es } \boldsymbol{A''\left(-\frac{1}{3}, -\frac{5}{3}, -\frac{5}{3}\right)}.}$$

Ejercicio 4. Opción B. Probabilidad

La longitud de la sardina del Pacífico (Sardinops sagax) se puede considerar que es una variable aleatoria con distribución normal de media 175 mm y desviación típica 25.75 mm.

a) **Una empresa envasadora de esta variedad de sardinas solo admite como sardinas de calidad aquellas con una longitud superior a 16 cm. ¿Qué porcentaje de las sardinas capturadas por un buque pesquero serán de la calidad que espera la empresa envasadora?**

b) **Hallar una longitud $t < 175$ mm tal que entre t y 175 mm estén el 18% de las sardinas capturadas.**

c) **En altamar se procesan las sardinas en lotes de 10. Posteriormente se devuelven al mar las sardinas de cada lote que son menores de 15 cm por considerarlas pequeñas. ¿Cuál es la probabilidad de que en un lote haya al menos una sardina devuelta por pequeña?**

Solución:

a) **¿Qué porcentaje de las sardinas capturadas por un buque pesquero serán de la calidad que espera la empresa envasadora?**

$X \sim N(\mu = 175, \sigma = 25.75)$. Calidad si $X > 160$ mm. $Z = (X - \mu)/\sigma$. $P(X > 160) = P(Z > (160 - 175)/25.75) = P(Z > -15/25.75) \approx P(Z > -0.58)$. $P(Z > -0.58) = P(Z < 0.58) \approx 0.7190$.

z	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621

Porcentaje: 71.90%.

$$\boxed{\textbf{El porcentaje de sardinas de calidad es del 71.90\%.}}$$

b) **Hallar una longitud $t < 175$ mm tal que entre t y 175 mm estén el 18% de las sardinas capturadas.**

Buscamos t tal que $P(t < X < 175) = 0.18$.

$$P(\frac{t-175}{25.75} < Z < \frac{175-175}{25.75}) = P(z_t < Z < 0) = 0.18$$

$$\Phi(0) - \Phi(z_t) = 0.18 \implies 0.5 - \Phi(z_t) = 0.18 \implies \Phi(z_t) = 0.32$$

Buscamos z'' tal que $\Phi(z'') = 1 - 0.32 = 0.68$. En la tabla, $z'' \approx 0.47$.

Como $\Phi(z_t) < 0.5$, z_t es negativo. $z_t = -z'' \approx -0.47$. $\frac{t-175}{25.75} = -0.47 \implies t = 175 - 0.47(25.75) \approx 175 - 12.1025 \approx 162.8975$.

z	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	~~0,6554~~	~~0,6591~~	~~0,6628~~	~~0,6664~~	~~0,6700~~	~~0,6736~~	~~0,6772~~	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]

$$\boxed{\textbf{La longitud es } \boldsymbol{t \approx 162.9} \text{ mm.}}$$

c) **¿Cuál es la probabilidad de que en un lote haya al menos una sardina devuelta por pequeña?**

Pequeña si $X < 150$ mm.

$$p = P(X < 150) = P(Z < (150 - 175)/25.75) = P(Z < -25/25.75) \approx P(Z < -0.97)$$
$$P(Z < -0.97) = 1 - P(Z \le 0.97) \approx 1 - 0.8340 = 0.166$$

Sea Y = número de sardinas pequeñas en un lote de $n = 10$. $Y \sim B(10, 0.166)P(Y \ge 1) = 1 - P(Y = 0)$.

$$P(Y = 0) = \binom{10}{0}(0.166)^0(1 - 0.166)^{10} = (0.834)^{10} \approx 0.1628$$

$$P(Y \ge 1) = 1 - 0.1628 \approx 0.8372$$

$$\boxed{\boldsymbol{P(Y \ge 1) \approx 0.8372}}$$